第5講　ベクトル

1　O を原点とする座標空間に 2 点 A$(-1,\ 2,\ 0)$，B$(2,\ p,\ q)$ がある。ただし，$q>0$ とする。線分 AB の中点 C から直線 OA に引いた垂線と直線 OA の交点 D は，線分 OA を 9：1 に内分するものとする。また，点 C から直線 OB に引いた垂線と直線 OB の交点 E は，線分 OB を 3：2 に内分するものとする。

(1)　点 B の座標を求めよう。

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=$ **ア** である。また，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウエ}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であることにより，

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表される。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ から

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$ **ケ** ……………………………①

である。同様に，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ から

$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=20$ ……………………………②

を得る。

①と②，および $q>0$ から，B の座標は $\left(2,\ \boxed{コ},\ \sqrt{\boxed{サ}}\right)$ である。

（次ページに続く。）

(2) 3点O，A，Bの定める平面を α とし，点 $(4,\ 4,\ -\sqrt{7})$ をGとする。また，α 上に点Hを $\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OB}$ が成り立つようにとる。$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を用いて表そう。

Hが α 上にあることから，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$

と表される。よって

$$\overrightarrow{GH}=\boxed{\text{シ}}\,\overrightarrow{OG}+s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$

である。これと，$\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OA}$ および $\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OB}$ が成り立つことから，$s=\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$，

$t=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ が得られる。ゆえに

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}\overrightarrow{OB}$$

となる。また，このことから，Hは $\boxed{\text{ツ}}$ であることがわかる。

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

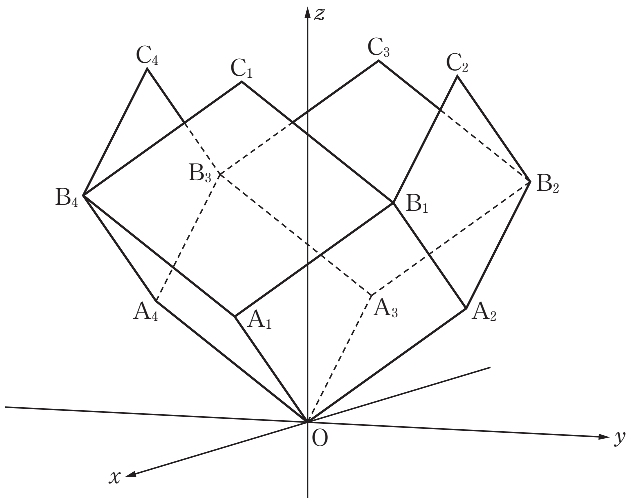
⓪ 三角形OACの内部の点
① 三角形OBCの内部の点
② 点O，Cと異なる，線分OC上の点
③ 三角形OABの周上の点
④ 三角形OABの内部にも周上にもない点

2　a を正の実数とする。O を原点とする座標空間に 4 点

$$A_1(1,\ 0,\ a),\ A_2(0,\ 1,\ a),\ A_3(-1,\ 0,\ a),\ A_4(0,\ -1,\ a)$$

がある。また，次の図のように，4 点 B_1，B_2，B_3，B_4 を四角形 $A_1OA_2B_1$，$A_2OA_3B_2$，$A_3OA_4B_3$，$A_4OA_1B_4$ がそれぞれひし形になるようにとる。さらに，4 点 C_1，C_2，C_3，C_4 を四角形 $A_1B_1C_1B_4$，$A_2B_2C_2B_1$，$A_3B_3C_3B_2$，$A_4B_4C_4B_3$ がそれぞれひし形になるようにとる。

ただし，座標空間における四角形を考える際には，その四つの頂点が同一平面上にあるものとする。



(1)　点 B_2，C_3 の座標は

$$B_2\left(-1,\ \boxed{ア},\ \boxed{イウ}\right),\ C_3\left(-1,\ \boxed{エ},\ \boxed{オカ}\right)$$

である。

（次ページに続く。）

また，

$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}=$ キ ，$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{B_2C_3}=$ ク

となる。

キ ， ク の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 0	① 1	② -1
③ a^2	④ a^2+1	⑤ a^2-1
⑥ $2a^2$	⑦ $2a^2+1$	⑧ $2a^2-1$

(2) ひし形 $A_1OA_2B_1$ と $A_1B_1C_1B_4$ が合同であるとする。

対応する対角線の長さが等しいことから，$a=\dfrac{\sqrt{\text{ケ}}}{\text{コ}}$ であることがわかる。

直線 OA_1 上の点 P を $\angle OPA_2$ が直角となるようにとる。

実数 s を用いて $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA_1}$ と表せる。$\overrightarrow{PA_2}$ と $\overrightarrow{OA_1}$ が垂直であること，および

$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_1}=\dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}$ ，$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=\dfrac{\text{ス}}{\text{セ}}$

であることにより

$s=\dfrac{\text{ソ}}{\text{タ}}$

であることがわかる。

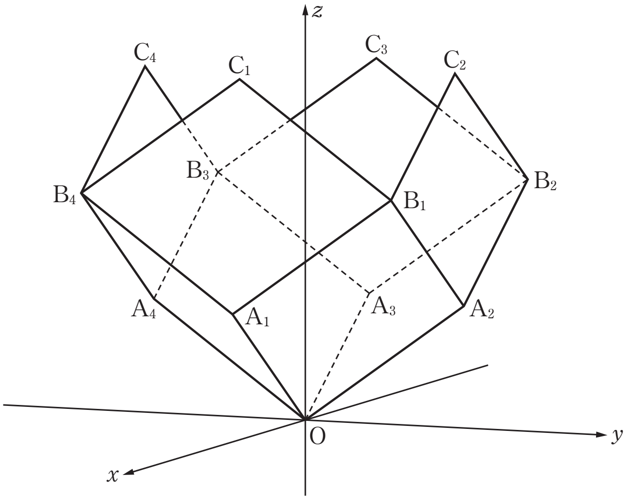
（次ページに続く。）

(3)　実数 a および点 P を(2)のようにとり，3 点 P，A_2，A_4を通る平面を α とするとき，次のことについて考察しよう。

考察すること

平面 α と 2 点 B_2，C_3 の位置関係

$\angle OPA_4$ も直角であるので，$\overrightarrow{OA_1}$ と平面 α は垂直であることに注意する。



直線 B_2C_3 と平面 α の交点を Q とする。

実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB_2}+t\overrightarrow{B_2C_3}$$

と表せる。$\overrightarrow{PQ}$ が $\overrightarrow{OA_1}$ と垂直であることにより

$$t=\boxed{\text{チ}}$$

であることがわかる。

座標空間から平面 α を除いた部分は，α を境に，原点 O を含む側と含まない側に分けられる。このとき，点 B_2 は $\boxed{\text{ツ}}$ にあり，点 C_3 は $\boxed{\text{テ}}$ にある。

（次ページに続く。）

［チ］の解答群

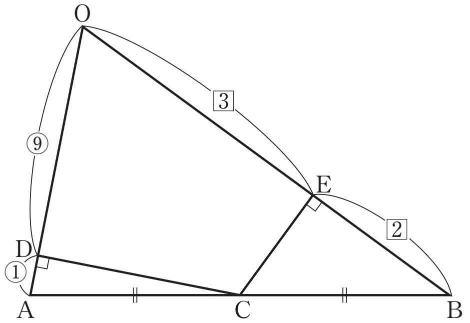
⓪ 0	① 1	② -1	③ $\frac{1}{2}$
④ $-\frac{1}{2}$	⑤ $\frac{1}{3}$	⑥ $-\frac{1}{3}$	⑦ $\frac{2}{3}$

［ツ］，［テ］の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ α 上
① O を含む側
② O を含まない側

第５講　ベクトル

1 (1) $\overrightarrow{OA}=(-1,\ 2,\ 0)$ より



$|\overrightarrow{OA}|^2=(-1)^2+2^2+0^2=5$

$\overrightarrow{OD}=\dfrac{9}{10}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

であることから

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$

$=\dfrac{9}{10}\overrightarrow{OA}-\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

$=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

と表される。

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{CD}$ から $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

$\overrightarrow{OA}\cdot\left(\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)=0$

$\dfrac{2}{5}|\overrightarrow{OA}|^2-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$　　$\dfrac{2}{5}\cdot5-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

よって，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4$　……①

同様に

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}-\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{10}\overrightarrow{OB}$

であり，$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{CE}$ から $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CE}=0$ であることから，

$\overrightarrow{OB}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{10}\overrightarrow{OB}\right)=0$

$-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{10}|\overrightarrow{OB}|^2=0$　　$-\dfrac{1}{2}\cdot4+\dfrac{1}{10}|\overrightarrow{OB}|^2=0$

よって，$|\overrightarrow{OB}|^2=20$　……②

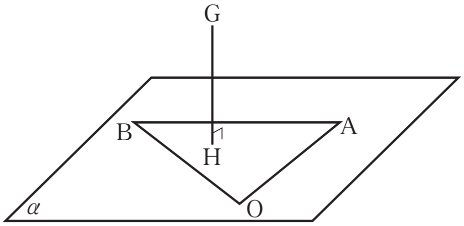
$\overrightarrow{OA}=(-1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{OB}=(2,\ p,\ q)$ より

①から，$-2+2p=4$　　よって，$p=3$

②から，$2^2+p^2+q^2=20$　　$4+3^2+q^2=20$　　$q^2=7$　　$q>0$ から，$q=\sqrt{7}$

したがって，B の座標は $(2,\ 3,\ \sqrt{7})$ である。

(2) 点 H が平面 α 上にあることから，実数 s，t を用いて



$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

と表される。よって，

$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OH}=-\overrightarrow{OG}+s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

である。これと，$\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OA}$ および $\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OB}$ が成り立つことから，

$\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ より

$(-\overrightarrow{\mathrm{OG}}+s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

$-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}+s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$　……③

$\overrightarrow{\mathrm{GH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ より

$(-\overrightarrow{\mathrm{OG}}+s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

$-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}+s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=0$　……④

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(4,\ 4,\ -\sqrt{7})$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}=-1\cdot4+2\cdot4+0\cdot(-\sqrt{7})=4$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}=2\cdot4+3\cdot4+\sqrt{7}\cdot(-\sqrt{7})=13$

よって，③，④より

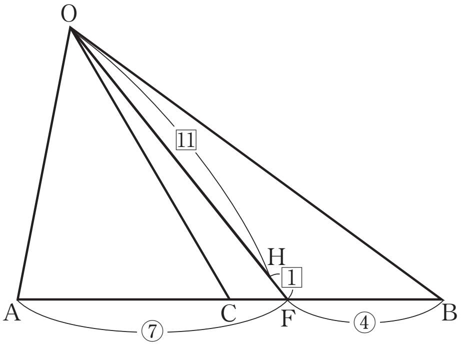
$\begin{cases}-4+5s+4t=0\\-13+4s+20t=0\end{cases}$　したがって，$s=\frac{1}{3}$，$t=\frac{7}{12}$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{7}{12}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=\frac{4}{12}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{7}{12}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=\frac{11}{12}\left(\frac{4}{11}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{7}{11}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

したがって，線分 AB を 7：4 に内分する点を F とすると，点 H は線分 OF を 11：1 に内分する点である。



このことから，H は三角形 OBC の内部の点（①）である。

2　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OB_2}}=\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}+\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}}=\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}=(0,\ 1,\ a)+(-1,\ 0,\ a)=(-1,\ 1,\ 2a)$

よって，$\mathrm{B_2}(-1,\ 1,\ 2a)$

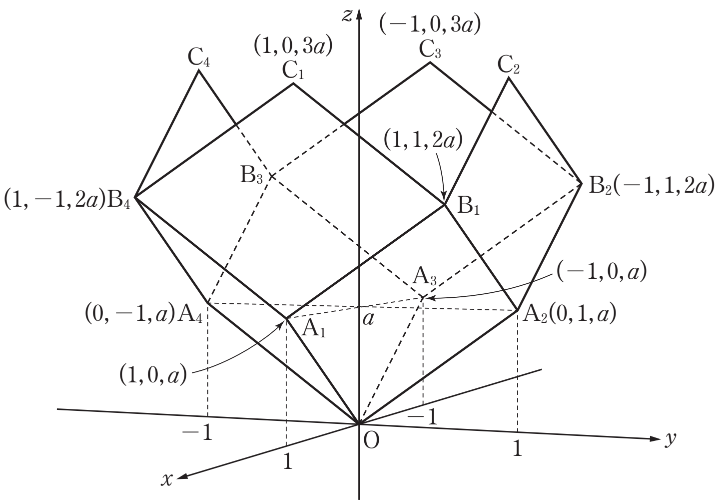
$\overrightarrow{\mathrm{OC_3}}=\overrightarrow{\mathrm{OB_2}}+\overrightarrow{\mathrm{B_2C_3}}=\overrightarrow{\mathrm{OB_2}}+\overrightarrow{\mathrm{A_3B_3}}=\overrightarrow{\mathrm{OB_2}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_4}}=(-1,\ 1,\ 2a)+(0,\ -1,\ a)$

$=(-1,\ 0,\ 3a)$

よって，$\mathrm{C_3}(-1,\ 0,\ 3a)$

$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB_2}}=(1,\ 0,\ a)\cdot(-1,\ 1,\ 2a)=2a^2-1$　（⑧）

$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B_2C_3}}=\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_4}}=(1,\ 0,\ a)\cdot(0,\ -1,\ a)=a^2$　（③）



(2)　(1)と同様にして，$B_1(1,\ 1,\ 2a)$，$C_1(1,\ 0,\ 3a)$，$B_4(1,\ -1,\ 2a)$ より

$OB_1=\sqrt{1^2+1^2+(2a)^2}=\sqrt{4a^2+2}$，　$A_1A_2=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

$A_1C_1=2a=\sqrt{4a^2}<OB_1$

よって　$A_1C_1=A_1A_2$ より　$2a=\sqrt{2}$　　　$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

このとき　$OB_1=2$，$B_1B_4=2$ より　$OB_1=B_1B_4$

$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_1}=(1,\ 0,\ a)\cdot(1,\ 0,\ a)=1+a^2=1+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{3}{2}$

$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=(1,\ 0,\ a)\cdot(0,\ 1,\ a)=a^2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

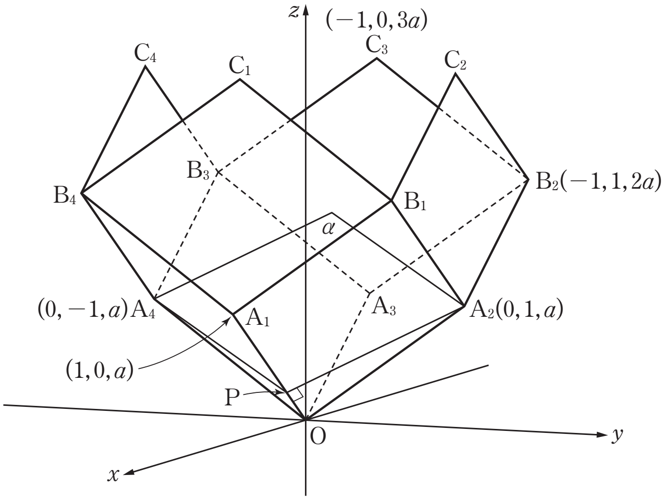
$\overrightarrow{PA_2}$ と $\overrightarrow{OA_1}$ が垂直であることから

$\overrightarrow{PA_2}\cdot\overrightarrow{OA_1}=(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{OA_1}=(\overrightarrow{OA_2}-s\overrightarrow{OA_1})\cdot\overrightarrow{OA_1}$

$=\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}-s\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_1}$

$=\dfrac{1}{2}-s\cdot\dfrac{3}{2}=0$　　　よって　$s=\dfrac{1}{3}$

(3)



(2)より $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}=\left(\dfrac{1}{3},\ 0,\ \dfrac{a}{3}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB_2}}+t\overrightarrow{\mathrm{B_2C_3}}=(-1,\ 1,\ 2a)+t(0,\ -1,\ a)=(-1,\ -t+1,\ at+2a)$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(-\dfrac{4}{3},\ -t+1,\ at+\dfrac{5}{3}a\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$ が垂直であることから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}=\left(-\frac{4}{3},\ -t+1,\ at+\frac{5}{3}a\right)\cdot(1,\ 0,\ a)=-\frac{4}{3}+a^2t+\frac{5}{3}a^2$$
$$=-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}t+\frac{5}{6}=0$$

よって　$t=1$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB_2}}+\overrightarrow{\mathrm{B_2C_3}}=\overrightarrow{\mathrm{OC_3}}$ より，点 $\mathrm{C_3}$ は平面 α 上の点 Q と一致する。

したがって，点 $\mathrm{C_3}$ は平面 α 上（⓪）にある。

$\overrightarrow{\mathrm{C_3B_2}}=\overrightarrow{\mathrm{A_4O}}$ であり，$\mathrm{C_3}$，$\mathrm{A_4}$ はともに平面 α 上の点，点 O は平面 α を境に O を含む側にあることから，点 $\mathrm{B_2}$ は α を境に O を含む側（①）にある。